



ESTADO DO RIO GRANDE DO SUL
SECRETARIA DA EDUCAÇÃO
8ª COORDENADORIA REGIONAL DE EDUCAÇÃO
SANTA MARIA – RS
COLÉGIO ESTADUAL MANOEL RIBAS



PROFESSORES: José Pedro Pereira de Carvalho e Tânia Beatriz Eich

ÁREA: Matemática e suas Tecnologias

DISCIPLINA: Matemática

SÉRIE: 3º ANO

NOME DO(A) ALUNO(A): _____

TURMA: _____

INSTRUÇÕES PARA A ATIVIDADE A SER REALIZADA ENTRE 04-06-2020 e 14-06-2020

ATIVIDADE PROPOSTA

- 1- Estude com atenção as 6 folhas abaixo, tentando compreender como surgiram as fórmulas sobre juros compostos.
- 2- Estude os exemplos e refaça-os para ter certeza que identifica as variáveis e consegue fazer todas as operações.
- 3- Resolva as questões solicitadas a seguir no seu caderno:
Questões: 34 – 35 – 40 – 41 – 42 – 45 – 48 - 51 .

Juros compostos

Considere a seguinte situação:

Depois de muito trabalho, Miguel juntou R\$ 500,00 e abriu uma caderneta de poupança para seu filho, como presente pelo 10º aniversário do menino.

Vamos supor que o rendimento dessa caderneta de poupança seja de 0,6% ao mês e que não será feita nenhuma retirada de dinheiro nem depósito nos próximos anos.

Quando o filho de Miguel completar 18 anos, que valor ele terá disponível em sua caderneta?

O mecanismo pelo qual o saldo dessa poupança irá crescer, mês a mês, é conhecido como regime de **capitalização acumulada** ou regime de **juros compostos**.

Qual é o princípio básico desse sistema de capitalização?

• Ao final do 1º mês, os juros de 0,6% incidem sobre os R\$ 500,00; os juros obtidos (R\$ 3,00) são incorporados ao capital, produzindo o primeiro montante ($R\$ 3,00 + R\$ 500,00 = R\$ 503,00$).

• Ao final do 2º mês, os juros de 0,6% incidem sobre o primeiro montante (R\$ 503,00) e os juros obtidos (R\$ 3,02) são incorporados ao primeiro montante, produzindo o segundo montante ($R\$ 3,02 + R\$ 503,00 = R\$ 506,02$).

• Ao final do 3º mês, os juros de 0,6% incidem sobre o segundo montante (R\$ 506,02) e os juros obtidos (R\$ 3,04) são incorporados ao segundo montante, produzindo o terceiro montante ($R\$ 3,04 + R\$ 506,02 = R\$ 509,06$), e assim sucessivamente.

Vamos agora generalizar esse raciocínio.

Consideremos um capital **C**, aplicado a juros compostos, a uma taxa de juros **i** (expressa na forma decimal) fixa por período, durante **n** períodos. O período considerado deve ser compatível com a unidade de tempo da taxa.



Pais e filhos podem conversar sobre a importância de poupar, a necessidade de consumir conscientemente e outros temas de educação financeira.

Professor, se achar pertinente, faça um levantamento prévio sobre o conhecimento que os estudantes têm da caderneta de poupança, o investimento mais conhecido dos brasileiros. É importante destacar que esse tipo de aplicação financeira é isento de pagamento de imposto. É uma oportunidade de discutir sobre a importância de poupar, planejamento financeiro, rentabilidade e risco de investimentos.



Temos:

- Ao final do primeiro período, o primeiro montante será igual a:

$$M_1 = C + C \cdot i \Rightarrow M_1 = C \cdot (1 + i) \quad 1$$

- Ao final do segundo período, o segundo montante será igual a:

$$M_2 = M_1 + i \cdot M_1 = M_1 \cdot (1 + i) \Rightarrow M_2 = C \cdot (1 + i)^2 \quad 2$$

- Ao final do terceiro período, o terceiro montante será igual a:

$$M_3 = M_2 + i \cdot M_2 = M_2 \cdot (1 + i) \Rightarrow M_3 = C \cdot (1 + i)^3 \quad 3$$

- Ao final do quarto período, o quarto montante será igual a:

$$M_4 = M_3 + i \cdot M_3 = M_3 \cdot (1 + i) \Rightarrow M_4 = C \cdot (1 + i)^4$$

⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

- Ao final do n-ésimo período, o n-ésimo montante será igual a:

$$M_n = C \cdot (1 + i)^n$$

É importante lembrar, mais uma vez, que o regime de juros compostos é utilizado na maioria das transações comerciais e aplicações financeiras.

EXEMPLO 2

Um capital de R\$ 300,00 é aplicado à taxa de 2% ao mês, no regime de juros compostos. Qual será o montante obtido após três meses?

1ª modo:

- Ao final do 1ª mês, o 1ª montante, em reais, será: $300 + 0,02 \cdot 300 = 306$
- Ao final do 2ª mês, o 2ª montante, em reais, será: $306 + 0,02 \cdot 306 = 312,12$
- Ao final do 3ª mês, o montante, em reais, será: $312,12 + 0,02 \cdot 312,12 \approx 318,36$

2ª modo:

Aplicando a fórmula deduzida, obteremos diretamente o montante após três meses, sem ter de calcular o saldo nos meses anteriores. Basta fazer:

$$M_3 = 300 \cdot (1 + 0,02)^3 \Rightarrow M_3 = 300 \cdot 1,02^3 \approx 318,36$$

Logo, o montante após 3 meses será de 318,36 reais.

EXEMPLO 3

Voltando ao problema da caderneta de poupança do filho de Miguel, vamos determinar o valor que o menino terá ao completar 18 anos.

Com uma calculadora científica, obtemos então:

$$\begin{cases} C = 500 \\ i = 0,6\% = \frac{0,6}{100} = 0,006 \\ n = 96 \text{ meses (8 anos)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_{96} = 500 \cdot (1 + 0,006)^{96} \\ M_{96} = 500 \cdot 1,006^{96} \\ M_{96} \approx 500 \cdot 1,77585 \\ M_{96} \approx 887,93 \end{cases}$$

Logo, Miguel terá 887,93 reais na caderneta de poupança.

Basta utilizar a tecla  ou  (dependendo do modelo): inicialmente "entramos" com a base (1,006), seguida dessa tecla e depois do expoente (96).

PENSE NISTO:

Como podemos obter, com uma calculadora científica, o valor $1,006^{96}$?



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

- 7** Um investidor aplicou R\$ 10 000,00 em um fundo de investimento que rende 12% ao ano, a juros compostos. Qual é o menor número inteiro de meses necessário para que o montante dessa aplicação seja R\$ 50 000,00?

Solução:

$$\text{Temos: } \begin{cases} C = 10\,000 \\ M = 50\,000 \\ i = 0,12 \\ n = ? \end{cases} \Rightarrow 50\,000 = 10\,000 \cdot (1 + 0,12)^n \Rightarrow 5 = 1,12^n$$

Para resolver a equação $1,12^n = 5$, podemos proceder de duas maneiras:

1ª modo:

$$1,12^n = 5 \Rightarrow \log_{1,12} 5 = n;$$

Escrevendo esse logaritmo em base 10, temos:

$$n = \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 1,12}$$

Com o auxílio de uma calculadora científica, obtemos os valores desses logaritmos:

$$n \approx \frac{0,69897}{0,049218} \Rightarrow n \approx 14,2$$

2ª modo:

De $1,12^n = 5$, podemos obter outra igualdade "aplicando" logaritmo decimal aos dois membros, isto é:

$$1,12^n = 5 \Rightarrow \log 1,12^n = \log 5 \Rightarrow n \cdot \log 1,12 = \log 5 \Rightarrow n = \frac{\log 5}{\log 1,12} \approx 14,2$$

Assim, o menor número inteiro de meses é 15.

- 8** Uma dívida de R\$ 500,00, contraída a juros compostos e a uma taxa mensal fixa, aumenta para R\$ 680,00 após quatro meses. Qual é a taxa mensal aproximada de juros?

Solução:

$$M = C \cdot (1 + i)^n \Rightarrow 680 = 500 \cdot (1 + i)^4 \Rightarrow 1,36 = (1 + i)^4 \Rightarrow 1 + i = \sqrt[4]{1,36} \Rightarrow 1 + i = 1,0799 \Rightarrow i \approx 0,0799$$

Assim, a taxa mensal aproximada é de 8% ao mês.



PENSE NISTO:

Como podemos obter o valor de $\sqrt[4]{1,36}$ com uma calculadora científica?

Relembrando:

- Dados os números reais **a** e **b**, $a > 0$ e $0 < b$ e $b \neq 1$, chama-se **logaritmo de a na base b** (indica-se $\log_b a$) o número real **x** tal que $b^x = a$:

$$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$$

Assim, por exemplo, $\log_3 9 = 2$; $\log_2 \frac{1}{4} = -2$; $\log_5 1 = 0$; $\log 1\,000 = 3$ (lembre-se de que, quando a base é omitida, convencionou-se que ela é igual a 10, ou seja, é o **logaritmo decimal**).

- Propriedades:

Sejam **a** e **c** números reais positivos, $0 < b$ e $b \neq 1$, e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Valem as seguintes propriedades:

- $\log_b (a \cdot c) = \log_b a + \log_b c$
- $\log_b \left(\frac{a}{c}\right) = \log_b a - \log_b c$
- $\log_b a^\alpha = \alpha \cdot \log_b a$

Alguns modelos apresentam a tecla



. Nesse caso, deve-se digitar

inicialmente 4, em seguida a tecla e por fim o valor 1,36. Outra opção é lembrar a definição de potência de expoente racional:

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} \quad (\text{para } a > 0, p \in \mathbb{Z} \text{ e } q \in \mathbb{N}^*).$$

Assim, $\sqrt[4]{1,36} = 1,36^{\frac{1}{4}} = 1,36^{0,25}$. Dai, usa-se a tecla de potência: ou





Assim, por exemplo, podemos expressar o valor de $\log 48$ em função de $\log 2$ e de $\log 3$:

$$\log 48 = \log (2^4 \cdot 3) = \log 2^4 + \log 3 = 4 \cdot \log 2 + \log 3$$

Se b é um número real positivo, $0 < a$ e $a \neq 1$ e $0 < c$ e $c \neq 1$, temos a fórmula da mudança de base:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

► Juros compostos com taxa de juros variável

No estudo dos juros compostos deduzimos a fórmula do montante, admitindo a taxa de juros constante em cada um dos períodos. No entanto, muitas vezes, as taxas de rentabilidade de um fundo de investimento, por exemplo, variam de um mês para o outro. Quando isso ocorre, podemos calcular os montantes mês a mês, lembrando que o princípio de capitalização acumulado é o mesmo.

EXEMPLO 4

No começo do ano, o lote padrão de ações de uma empresa valia R\$ 80,00. Nos meses de janeiro e fevereiro, as ações dessa empresa valorizaram-se 30% e 20%, respectivamente. Qual será o valor desse lote no final de fevereiro?

- No final de janeiro, o lote passará a valer, em reais:

$$80 + 30\% \cdot 80 = 80 + 0,3 \cdot 80 = 80 + 24 = 104$$

- No final de fevereiro, com a valorização de 20%, o lote passará a valer, em reais:

$$104 + 20\% \cdot 104 = 104 + 20,8 = 124,80$$

Observe que:

- O valor do lote, em reais, no final de janeiro é $1,3 \cdot 80$.
- O valor do lote, em reais, ao final de fevereiro é:

$$1,2 \cdot \underbrace{1,3 \cdot 80}_{\text{valor de janeiro}} = 1,56 \cdot 80 = 124,80$$

Valor inicial: 80
Valor final: $1,2 \cdot 1,3 \cdot 80 = 1,56 \cdot 80$
Valorização: $1,56 \cdot 80 - 80 =$
 $= 0,56 \cdot 80 = 56\% \cdot 80$. Assim, a
valorização foi de 56%.



PENSE NISTO:

Qual foi a valorização acumulada nesses dois primeiros meses do ano?



EXERCÍCIOS



- 34 Calcule os juros e o montante de uma transação financeira a juros compostos, nas seguintes condições:

- capital: R\$ 300,00; taxa: 2% a.m.; prazo: 4 meses;
- capital: R\$ 2 500,00; taxa: 5% a.m.; prazo: 1 ano;
- capital: R\$ 100,00; taxa: 16% a.a.; prazo: 3 anos;
- capital: R\$ 900; taxa 27% a.a.; prazo: 6 meses.

- 35 Bete dispõe de R\$ 2 000,00 para investir por três meses. Ela pretende escolher uma das opções seguintes: caderneta de poupança ou um fundo de renda fixa. As condições de cada investimento são apresentadas ao lado.

Qual é a opção mais vantajosa para Bete, levando em conta exclusivamente o critério financeiro? Nas suas contas, considere $1,005^3 \approx 1,015$ e $1,008^3 \approx 1,024$.

| | Rendimento | Imposto |
|---------------------|------------|-------------------|
| Poupança | 0,5% a.m. | — |
| Fundo de renda fixa | 0,8 % a.m. | 25% sobre o ganho |



ESTADO DO RIO GRANDE DO SUL
SECRETARIA DA EDUCAÇÃO
8ª COORDENADORIA REGIONAL DE EDUCAÇÃO
SANTA MARIA – RS
COLÉGIO ESTADUAL MANOEL RIBAS



- 36** Um investimento financeiro rende 1% ao mês, em regime de juros compostos. Décio aplicou R\$1 200,00 nesse investimento. No momento do resgate, são cobrados 15% de imposto de renda sobre o **rendimento** obtido.
- Considerando $1,01^{10} \approx 1,105$, determine o valor líquido (já descontado o imposto de renda) que caberá a Décio, se ele fizer o resgate:
- após 10 meses;
 - após 20 meses.
- 37** A caderneta de poupança é o investimento mais popular entre os brasileiros. Seu rendimento gira em torno de 0,5% ao mês e não há cobrança de imposto sobre os ganhos. Marlene investiu R\$ 2 000,00 na caderneta de poupança.
- Neste exercício, admita que, no período considerado, Marlene não fez depósitos nem saques nessa caderneta de poupança e use:
- $1,005^{12} \approx 1,06$; $1,005^{60} \approx 1,35$;
 $\log 1,005 \approx 0,002$ e $\log 2 \approx 0,301$.
- Determine o montante obtido por Marlene, se ela deixar o recurso investido por: 1 ano, 2 anos, 5 anos e 10 anos.
 - Qual é o menor número inteiro de meses que o valor investido deverá ficar aplicado a fim de que ela possa resgatar R\$ 4 000,00? E R\$ 10 000,00?
- 38** Um capital foi aplicado a juros compostos à taxa de 20% a.a., durante 3 anos. Se, decorrido esse período, o montante produzido foi de R\$ 864,00, qual foi o valor do capital aplicado?
- 39** Um capital de R\$ 5 000,00 é aplicado à taxa de juros compostos de 10% ao ano.
- Qual é o montante da aplicação após 5 anos? Considere $1,1^5 \approx 1,6$.
 - Qual é o rendimento percentual dessa aplicação considerando o período de cinco anos?
 - Qual é o tempo mínimo necessário para que o montante dessa aplicação seja R\$ 20 000,00? Considere $\log 2 \approx 0,30$ e $\log 11 \approx 1,04$.
- 40** Um capital foi aplicado a juros compostos, à taxa de 10% ao ano, durante 3 anos, gerando um montante de R\$ 66 550,00.
- Qual foi o capital aplicado?
 - Qual seria a diferença entre os juros recebidos por essa aplicação e por uma aplicação com mesmo capital, prazo e taxa, porém no regime de juros simples?
- 41** Um capital de R\$ 5 000,00, aplicado a uma taxa fixa mensal de juros compostos, gerou, em quatro meses, um montante de R\$ 10 368,00. Qual foi a taxa praticada?
- 42** Suponha que o valor de um terreno em uma área nobre de uma cidade venha aumentando à taxa de 100% ao ano. Qual é o número mínimo inteiro de anos necessários para que o valor do terreno seja correspondente a cem vezes seu valor atual?
- 43** Uma dívida do cartão de crédito passou, no regime de juros compostos, de R\$ 2 000,00 para R\$ 5 120,00 em dois anos. Sabendo que a administradora do cartão opera com uma taxa percentual de juros fixa por ano, determine:
- o valor dessa taxa ao ano;
 - o montante aproximado dessa dívida meio ano após a data na qual ela foi contraída. Considere: $\sqrt{10} \approx 3,16$.
- 44** Um terreno adquirido por R\$10 000,00 valoriza-se à taxa de 8% ao ano. Determine o tempo mínimo necessário para que o terreno passe a valer R\$ 30 000,00.
- Considere: $\log 2 \approx 0,30$ e $\log 3 \approx 0,48$.
- 45** No quadro seguinte encontramos a variação (valorização ou desvalorização) percentual mensal do valor da ação de uma empresa comercializada na Bolsa de Valores:
- | Mês | Rendimento |
|-------|------------|
| março | +8% |
| abril | +2,5% |
| maio | -3,0% |
- Sabendo que, no início de março, a ação valia R\$ 25,00, determine o seu valor ao final de maio.
 - Qual a variação percentual do valor da ação nesse período?
- 46** Em seu primeiro ano, um fundo de investimento em ações valorizou-se 25%. No segundo ano, o fundo desvalorizou-se 30% e, no terceiro ano, o fundo recuperou 35% das perdas do ano anterior.
- Quem aplicou R\$ 4 800,00 nesse fundo, desde a sua criação, saiu com lucro ou prejuízo ao final dos três anos? Expresse esse valor em reais e em termos percentuais, levando em conta o valor investido.
 - Qual o rendimento percentual desse fundo no 3º ano?



ESTADO DO RIO GRANDE DO SUL
SECRETARIA DA EDUCAÇÃO
8ª COORDENADORIA REGIONAL DE EDUCAÇÃO
SANTA MARIA – RS
COLÉGIO ESTADUAL MANOEL RIBAS



- 47** Um capital é aplicado a juros compostos à taxa de 20% ao ano. Qual é o menor número inteiro de anos necessários para que o montante dessa operação seja:
- o dobro do capital?
 - o triplo do capital?
 - o quádruplo do capital?
 - 800% a mais que o capital?
- Considere: $\log 2 \approx 0,3$ e $\log 3 \approx 0,48$.

- 48** Marcelo emprestou a Júlio 5 figurinhas da coleção da Copa do Mundo para ajudá-lo a montar seu álbum. Três semanas depois, Júlio, que é craque em "bater figurinhas", quitou sua dívida com Marcelo, devolvendo-lhe 35 figurinhas a mais que a quantia emprestada.
- Considerando que o "regime de juros" combinado entre os dois seja o de juros compostos, determine a taxa semanal de juros desse empréstimo.

- 49** Fernanda aplicou R\$ 200,00 em um fundo de ações. No primeiro ano, as ações valorizaram-se 25% e, no segundo ano, a valorização foi de 8%.
- Qual é o rendimento percentual bruto do fundo nesses dois anos?
 - Qual o valor líquido resgatado por Fernanda após esses dois anos, se, nesse fundo, é cobrado imposto de 20% sobre o ganho?

- 50** Uma empresa foi multada em R\$ 80 000,00 por irregularidades trabalhistas, comprometendo-se a pagar a multa ao final de um período de dez anos, acrescentando a ela juros compostos de 10% ao ano. Passados esses dez anos, a empresa conseguiu pagar apenas o valor da multa, sem os juros devidos, e renegociou a nova dívida, a uma taxa anual de juros compostos de 4% ao ano, com prazo de 5 anos. Qual será o montante a ser pago nessa nova negociação?

| x | x^5 |
|------|-------|
| 1,01 | 1,05 |
| 1,02 | 1,10 |
| 1,03 | 1,16 |
| 1,04 | 1,2 |
| 1,05 | 1,3 |
| 1,06 | 1,34 |
| 1,07 | 1,4 |
| 1,08 | 1,47 |
| 1,09 | 1,54 |
| 1,1 | 1,6 |

Use os valores aproximados da tabela acima para fazer os cálculos necessários.

- 51** Um investimento de risco apresentou uma taxa anual de rendimento fixa, gerando um aumento de 44% do capital investido em 2 anos. Qual foi a taxa anual de juros paga por esse investimento?

- 52** Um capital é empregado a uma taxa anual de 11%, no regime de juros compostos. Determine o menor número inteiro de meses necessários para que o montante obtido seja 47% maior que o capital. Use $\log 147 \approx 2,17$ e $\log 111 \approx 2,05$.

- 53** Um empresário tomou emprestado R\$ 40 000,00 do banco **A** e R\$ 60 000,00 do banco **B**, na mesma data, à taxa de juros (compostos) de 20% ao ano e 8% ao ano, respectivamente.

- Qual será sua dívida total ao final de dois anos?
- Daqui a quantos anos as dívidas nos dois bancos serão iguais?

Considere $\log 2 \approx 0,3$ e $\log 3 \approx 0,48$.

- 54** (Enem-MEC) Considere que uma pessoa decida investir uma determinada quantia e que sejam apresentadas três possibilidades de investimento, com rentabilidades líquidas garantidas pelo período de um ano, conforme descritas:

Investimento **A**: 3% ao mês

Investimento **B**: 36% ao ano

Investimento **C**: 18% ao semestre

As rentabilidades, para esses investimentos, incidem sobre o valor do período anterior. O quadro fornece algumas aproximações para a análise das rentabilidades.

| n | $1,03^n$ |
|----|----------|
| 3 | 1,093 |
| 6 | 1,194 |
| 9 | 1,305 |
| 12 | 1,426 |

Para escolher o investimento com maior rentabilidade anual, essa pessoa deverá:

- escolher qualquer um dos investimentos **A**, **B** ou **C**, pois as suas rentabilidades anuais são iguais a 36%.
- escolher os investimentos **A** ou **C**, pois suas rentabilidades anuais são iguais a 39%.
- escolher o investimento **A**, pois a sua rentabilidade anual é maior que as rentabilidades anuais dos investimentos **B** e **C**.
- escolher o investimento **B**, pois sua rentabilidade de 36% é maior que as rentabilidades de 3% do investimento **A** e de 18% do investimento **C**.
- escolher o investimento **C**, pois sua rentabilidade de 39% ao ano é maior que a rentabilidade de 36% ao ano dos investimentos **A** e **B**.