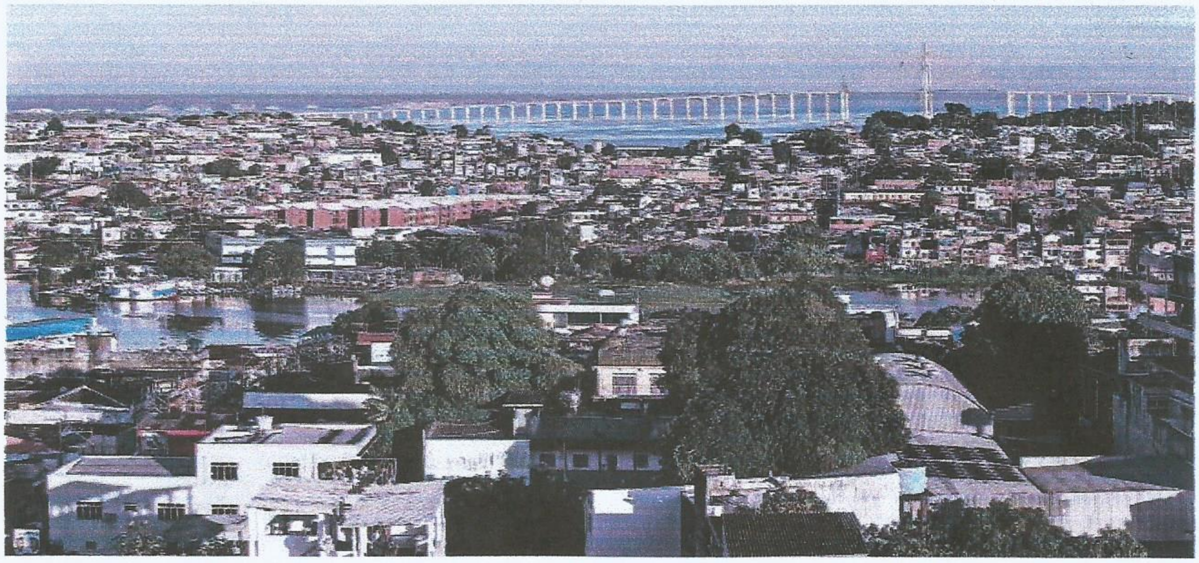
Nome do aluno(a):.. Turma:........ Data:. ..... /...... /.....
Disciplina: Matemática
Professor(a): Elvio de Chaves Pires , Tânia Eich , Paulo Cesar Alves dos Santos e Fabrício Gonçalves Rodrigues Dorneles
Série: 2º ano, todas as turmas

Atividade 1 – Estudar as páginas 65, 66, 67, 68 e 69

Introdução



ERNESTO REGHRAN/PULSAR IMAGENS

Em 2010, pouco mais de 9 mil pessoas residiam na zona rural de Manaus, enquanto cerca de 1792 mil residiam na zona urbana. Vista da cidade de Manaus (AM), 2015.

Em jornais, revistas e na internet frequentemente encontramos informações numéricas organizadas em forma de tabelas, com linhas e colunas. Vejamos alguns casos.

População nos Censos Demográficos, segundo as Grandes Regiões, as Unidades da Federação e a situação do domicílio – 1980/2010

Ano	Situação do domicílio	BRASIL	Região Norte	Região Nordeste	Região Sudeste	Região Sul	Região Centro-Oeste
1980[1]	Urbana	82 013 375	3 398 897	17 959 640	43 550 664	12 153 971	4 950 203
	Rural	39 137 198	3 368 352	17 459 516	9 029 863	7 226 155	2 053 312
1991[2]	Urbana	110 875 826	5 931 567	25 753 355	55 149 437	16 392 710	7 648 757
	Rural	36 041 633	4 325 699	16 716 870	7 511 263	5 724 316	1 763 485
2000[2]	Urbana	137 755 550	9 002 962	32 929 318	65 441 516	20 306 542	10 075 212
	Rural	31 835 143	3 890 599	14 763 935	6 855 835	4 783 241	1 541 533
2010[2]	Urbana	160 925 792	11 644 509	38 821 246	74 696 178	23 260 896	12 482 963
	Rural	29 830 007	4 199 945	14 260 704	5 668 232	4 125 995	1 575 131

(1) População recenseada. (2) População residente.

Fonte: IBGE, Censo Demográfico 1980, 1991, 2000 e 2010. Disponível em: <www.censo2010.ibge.gov.br/sinopse/index.php?dados=8>.Acesso em: 10 mar. 2016.

Produção, consumo e importação de feijão (mil toneladas)

Ano	Produção		Consumo		Importação	
	Projeção	Limite superior	Projeção	Limite superior	Projeção	Limite superior
2015/16	3363	4022	3357	3778	150	296
2016/17	3334	4267	3364	3959	149	357
2017/18	3345	4290	3371	4100	149	403
2018/19	3355	4313	3379	4219	149	442
2019/20	3366	4335	3386	4326	149	476
2020/21	3376	4358	3393	4423	148	507
2021/22	3387	4380	3400	4512	148	536
2022/23	3397	4403	3407	4596	148	562
2023/24	3408	4425	3414	4675	147	587
2024/25	3418	4447	3421	4751	147	611

Fonte: Projeções do agronegócio Brasil 2014/15 a 2024/25 — Projeções de longo prazo. jul. 2015. Disponível em: <www.agricultura.gov.br/arq_editor/PROJECOES_DO_AGRONEGOCIO_2025_WEB.pdf>. Acesso em: 10 mar. 2016.

Sejam **m** e **n** números naturais não nulos.

Uma tabela de $m \cdot n$ números reais dispostos em **m** linhas (filas horizontais) e **n** colunas (filas verticais) é uma matriz do tipo (ou formato) $m \times n$, ou simplesmente matriz $m \times n$.

Representamos usualmente uma matriz colocando seus elementos (números reais) entre parênteses ou entre colchetes.

Vejamos alguns exemplos:

- $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ é uma matriz 1×3.
- $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ é uma matriz 3×4.
- $B = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ é uma matriz 3×2.
- $E = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ é uma matriz 3×1.
- $C = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ é uma matriz 2×2.

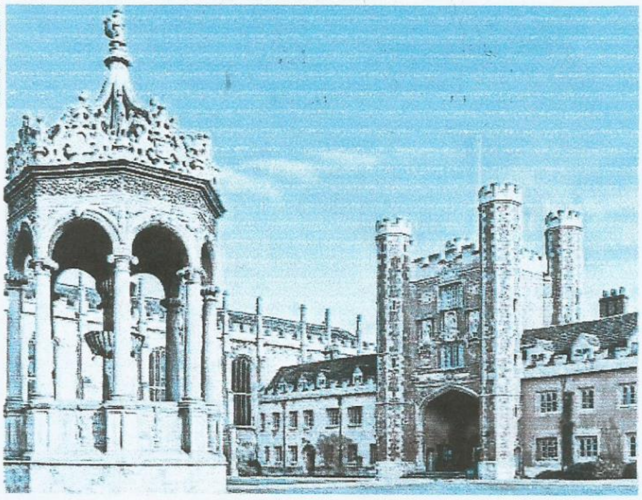
Como surgiram as matrizes

As matrizes teriam surgido com a escola inglesa Trinity College, em um artigo do matemático Arthur Cayley (1821-1895), datado de 1858. Vale lembrar, no entanto, que, bem antes, no século III a.C., os chineses já desenvolviam um processo de resolução de sistemas lineares em que aparecia implícita a ideia das matrizes.

Cayley criou as matrizes no contexto de estrutura algébrica (assunto de Matemática do Ensino Superior), sem pensar em suas aplicações práticas que apareceriam posteriormente, como a representação de informações numéricas em tabelas, organizadas segundo linhas e colunas, a computação gráfica, as imagens digitais etc.

Fonte de pesquisa: BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 3ª ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2010.

ALAMY/FOTOARENA



Trinity College, Cambridge, Inglaterra, 2015.

Representação de uma matriz

Consideremos uma matriz **A** do tipo m × n. Um elemento qualquer dessa matriz pode ser representado pelo símbolo $\mathbf{a}_{ij}$, no qual o índice **i** refere-se à linha e o índice **j** refere-se à coluna em que se encontra tal elemento.

Vamos convencionar que as linhas são numeradas de cima para baixo, e as colunas, da esquerda para a direita.

De modo geral, uma matriz **A** do tipo m × n é representada por $A = (a_{ij})_{m \times n}$, em que **i** e **j** são números inteiros positivos tais que $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, e $\mathbf{a}_{ij}$ é um elemento qualquer de **A**. Acompanhe o exemplo a seguir.

Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$

- O elemento que está na linha 1, coluna 1, é $a_{11} = -1$.
- O elemento que está na linha 1, coluna 2, é $a_{12} = 0$.
- O elemento que está na linha 2, coluna 1, é $a_{21} = -2$.
- O elemento que está na linha 2, coluna 2, é $a_{22} = 5$.
- O elemento que está na linha 3, coluna 1, é $a_{31} = 3$.
- O elemento que está na linha 3, coluna 2, é $a_{32} = 4$.

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

1 Escreva a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$, em que $a_{ij} = i - j$.

Solução:

A é uma matriz do tipo 2×3 e pode ser genericamente representada por $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$.

Fazendo $a_{ij} = i - j$, temos:

- $a_{11} = 1 - 1 = 0$
- $a_{12} = 1 - 2 = -1$
- $a_{13} = 1 - 3 = -2$
- $a_{21} = 2 - 1 = 1$
- $a_{22} = 2 - 2 = 0$
- $a_{23} = 2 - 3 = -1$

Assim, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Matrizes especiais

Vejamos alguns tipos de matrizes especiais.

- **Matriz linha:** é uma matriz formada por uma única linha.
  - $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ é uma matriz linha 1×3.
  - $B = \begin{bmatrix} 0 & -3 \end{bmatrix}$ é uma matriz linha 1×2.
- **Matriz coluna:** é uma matriz formada por uma única coluna.
  - $A = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \\ -8 \end{bmatrix}$ é uma matriz coluna 4×1.
  - $B = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz coluna 3×1.
- **Matriz nula:** é uma matriz cujos elementos são todos iguais a zero.
  Pode-se indicar a matriz nula $m \times n$ por $0_{m \times n}$.
  - $0_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ é a matriz nula 2×3.
  - $0_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ é a matriz nula 2×2.
- **Matriz quadrada:** é uma matriz que possui número de linhas igual ao número de colunas.
  - $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ é uma matriz quadrada 2×2. Dizemos que **A** é matriz quadrada de ordem 2.

- $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & \frac{1}{3} \\ -2 & 0 & 7 \\ \sqrt{3} & 1 & 4 \end{pmatrix}$ é uma matriz quadrada 3×3. Dizemos que **B** é quadrada de ordem 3.

Seja **A** uma matriz quadrada de ordem **n**. Temos que:

- os elementos de **A** cujo índice da linha é igual ao índice da coluna constituem a **diagonal principal** de **A**.

  Se **A** é uma matriz quadrada de ordem 3, os elementos $\mathbf{a_{11}}$, $\mathbf{a_{22}}$ e $\mathbf{a_{33}}$ formam a diagonal principal de **A**:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

- os elementos da matriz **A** cuja soma dos índices da linha e da coluna é igual a $n + 1$ constituem a **diagonal secundária** de **A**.

  Retomando o exemplo anterior, os elementos $\mathbf{a_{13}}$, $\mathbf{a_{22}}$ e $\mathbf{a_{31}}$ formam a diagonal secundária de **A**.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Matriz transposta

Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, chama-se **transposta de A** (indica-se por $\mathbf{A^t}$) a matriz:

$$A^t = (a'_{ji})_{n \times m}$$

tal que $a'_{ji} = a_{ij}$ para todo **i** e todo **j**.

Em outras palavras, a matriz $\mathbf{A^t}$ é obtida a partir de **A** trocando-se, ordenadamente, suas linhas pelas colunas.

- A transposta de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$ é $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$.

  Para a matriz **A**, observe que: $a_{11} = 1 = a'_{11}$

$$a_{12} = 3 = a'_{21}$$
$$a_{21} = 5 = a'_{12}$$
$$a_{22} = 9 = a'_{22}$$

- A transposta de $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ é $B^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.

- A transposta de $C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}$ é $C^t = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

Atividade 2 – Assistir ao vídeo do link abaixo sobre Matrizes.
https://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=75

Atividade 3 – Resolver a lista abaixo com 11 exercícios. (È necessário o desenvolvimento dos exercícios)

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

1 Dê o tipo (formato) de cada uma das seguintes matrizes:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -7 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 & 9 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \\ -2 & 9 & 6 \end{bmatrix}$

e) $E = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

f) $F = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & -3 \\ 2 & 7 & 0 & -1 \\ 3 & 9 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

2 Em cada caso, determine o elemento $\mathbf{a}_{22}$, se existir:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ -5 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 7 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

3 Escreva a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$, em que $a_{ij} = 3i - 2j$.

4 Determine a matriz $B = (b_{ij})_{3 \times 2}$, sendo $b_{ij} = 2 + i + j$.

5 Qual é a soma dos elementos da matriz $C = (c_{ij})_{2 \times 4}$, em que $c_{ij} = 1 + i - j$?

6 Em cada caso, obtenha a transposta da matriz dada:

a) $A = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -9 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} -8 & 7 & 5 \end{pmatrix}$

e) $E = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 11 \\ 0{,}5 & 7 \\ 3 & 4{,}1 \end{pmatrix}$

f) $F = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

g) $G = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

7 Seja $A = (a_{ij})_{3 \times 2}$, em que $a_{ij} = 2i + 3j$. Escreva a matriz $\mathbf{A}^t$.

8 Qual é o elemento $\mathbf{a}_{46}$ da matriz $A = (a_{ij})_{8 \times 8}$, em que $a_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \frac{2j}{i}$?

9 Seja a matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, em que $a_{ij} = i \cdot j$. Forneça os elementos que pertencem às diagonais principal e secundária de **A**.

10 Na matriz seguinte, estão representadas as quantidades de sorvetes de 1 bola e de 2 bolas comercializados no primeiro bimestre de um ano em uma sorveteria:

$$A = \begin{pmatrix} 1\,320 & 1\,850 \\ 1\,485 & 2\,040 \end{pmatrix}$$

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Cada elemento $\mathbf{a}_{ij}$ dessa matriz representa o número de unidades do sorvete do tipo **i** (i = 1 representa uma bola e i = 2, duas bolas) vendidas no mês **j** (j = 1 representa janeiro e j = 2, fevereiro).

a) Quantos sorvetes de duas bolas foram vendidos em janeiro?

b) Em fevereiro, quantos sorvetes de duas bolas foram vendidos a mais que os de uma bola?

c) Se o sorvete de uma bola custa R$ 3,00 e o de duas bolas custa R$ 5,00, qual foi a arrecadação bruta da sorveteria no primeiro bimestre com a venda desses dois tipos de sorvete?

11 A matriz **D** seguinte representa as distâncias (em quilômetros) entre as cidades **X**, **Y** e **Z**:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 15 & 27 \\ 15 & 0 & 46 \\ 27 & 46 & 0 \end{bmatrix}$$

Cada elemento $\mathbf{a}_{ij}$ dessa matriz fornece a distância entre as cidades **i** e **j**, com $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3\}$. Se a cidade **X** é representada pelo número 1, **Y** por 2 e **Z** por 3:

a) determine as distâncias entre **X** e **Y**, **Z** e **X**, e **Y** e **Z**.

b) qual é a transposta da matriz **D**?

Bons Estudos!!